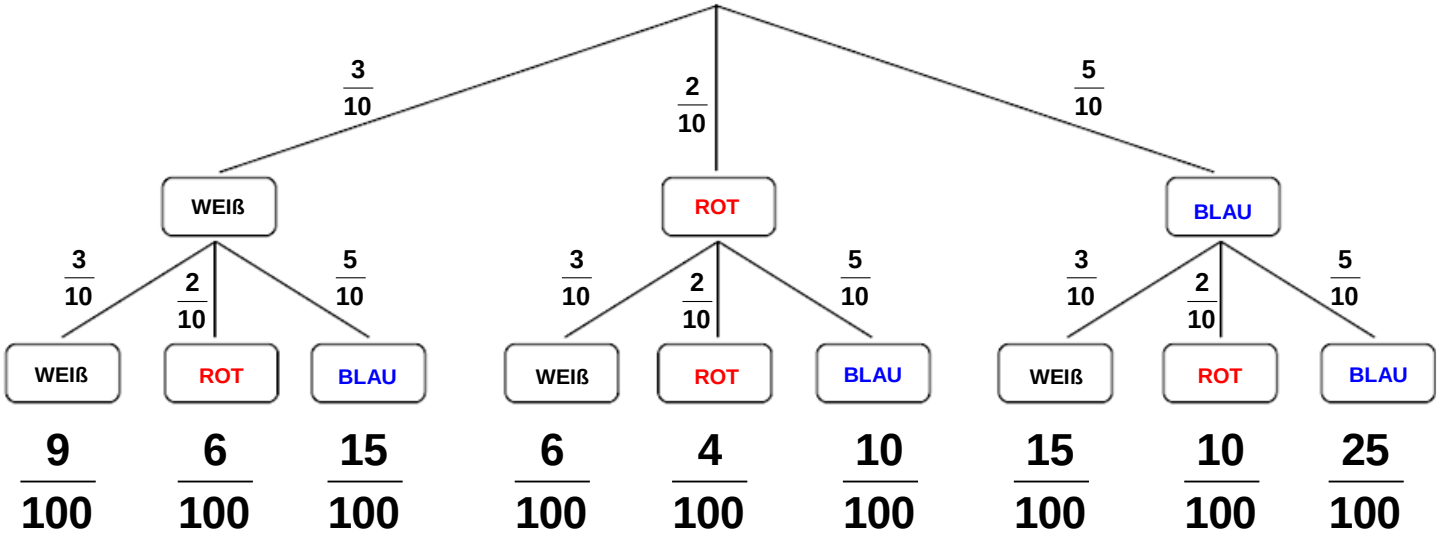
Wahrscheinlichkeit

Pflicht- und Wahlaufgaben der Haupttermine (Stand 2020)

Haupttermin 2008 2
Haupttermin 2008 – P8 (Ziehen mit Zurücklegen → Kugeln) 2
Haupttermin 2008 – W4a (Ziehen mit Zurücklegen → Glücksrad / Summe) 3
Haupttermin 2009 4
Haupttermin 2009 – P8 (Ziehen ohne Zurücklegen → Kugeln) 4
Haupttermin 2009 – W4a (Ziehen mit Zurücklegen → Würfel / Summe) 5
Haupttermin 2010 6
Haupttermin 2010 – P6 (Ziehen mit & ohne Zurücklegen → Kugeln) 6
Haupttermin 2010 – W4a (Ziehen mit Zurücklegen → Glücksrad / 2 Situationen) 7
Haupttermin 2011 8
Haupttermin 2011 – P8 (Ziehen ohne Zurücklegen → Glückskekse) 8
Haupttermin 2011 – W4a (Einstufiger Erwartungswert → Tombola / Lose) 9
Haupttermin 2012 10
Haupttermin 2012 – P4 (Ziehen ohne Zurücklegen → Parkhaus) 10
Haupttermin 2012 – W4a (Einstufiger Erwartungswert → Glücksrad)) 11
Haupttermin 2013 12
Haupttermin 2013 – P7 (Ziehen ohne Zurücklegen → Schokowürfel) 12
Haupttermin 2013 – W4a (Zweistufiger Erwartungswert → Würfel) 13
Haupttermin 2014 15
Haupttermin 2014 – P8 (Ziehen ohne Zurücklegen → Kugeln) 15
Haupttermin 2014 – W4a (Zweistufiger Erwartungswert → Buchstabenkarten) 16
Haupttermin 2015 17
Haupttermin 2015 – P4 (Ziehen ohne Zurücklegen → Kugeln) 17
Haupttermin 2015 – W4a (Zweistufiger Erwartungswert → Skatblatt) 18
Haupttermin 2016 19
Haupttermin 2016 – P7 (Ziehen ohne Zurücklegen → Buchstabenkarten) 19
Haupttermin 2016 – W4a (Zweistufiger Erwartungswert → Glücksräder) 20
Haupttermin 2017 21
Haupttermin 2017 – P4 (Ziehen mit Zurücklegen → Würfel / Summe) 21
Haupttermin 2017 – W4a (Zweistufiger Erwartungswert → Glücksrad) 22
Haupttermin 2018 23
Haupttermin 2018 – P7 (Ziehen ohne Zurücklegen) 23
Haupttermin 2018 – W4a (Zweistufiger Erwartungswert → Walzen) 24
Haupttermin 2019 25
Haupttermin 2019 – P7 (Ziehen ohne Zurücklegen) 25
Haupttermin 2019 – W4a (Zweistufiger Erwartungswert → Würfel) 26

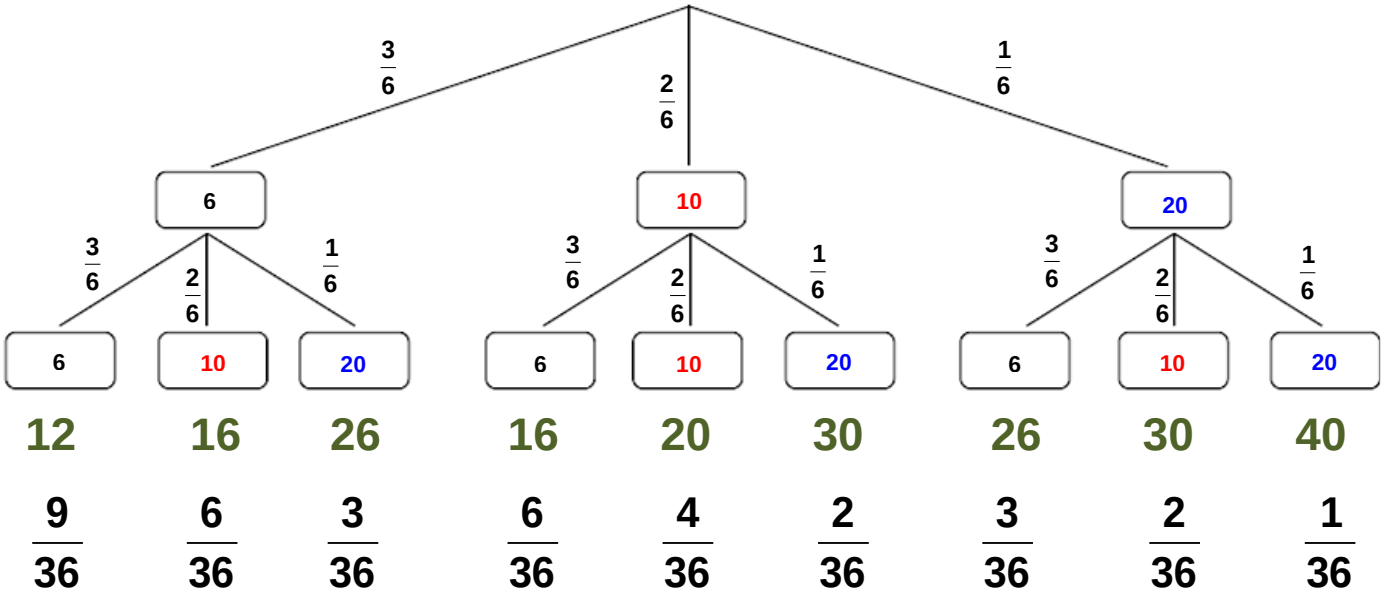
Haupttermin 2008

Haupttermin 2008 – P8 (Ziehen mit Zurücklegen → Kugeln)



$$P(2xgleich) = \frac{9}{100} + \frac{4}{100} + \frac{25}{100} = \frac{19}{50} = 38\%$$

$$P(rot\ /\ weiß) = \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{3}{25} = 12\%$$



$$P(30) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{4}{36} = 11{,}11\%$$

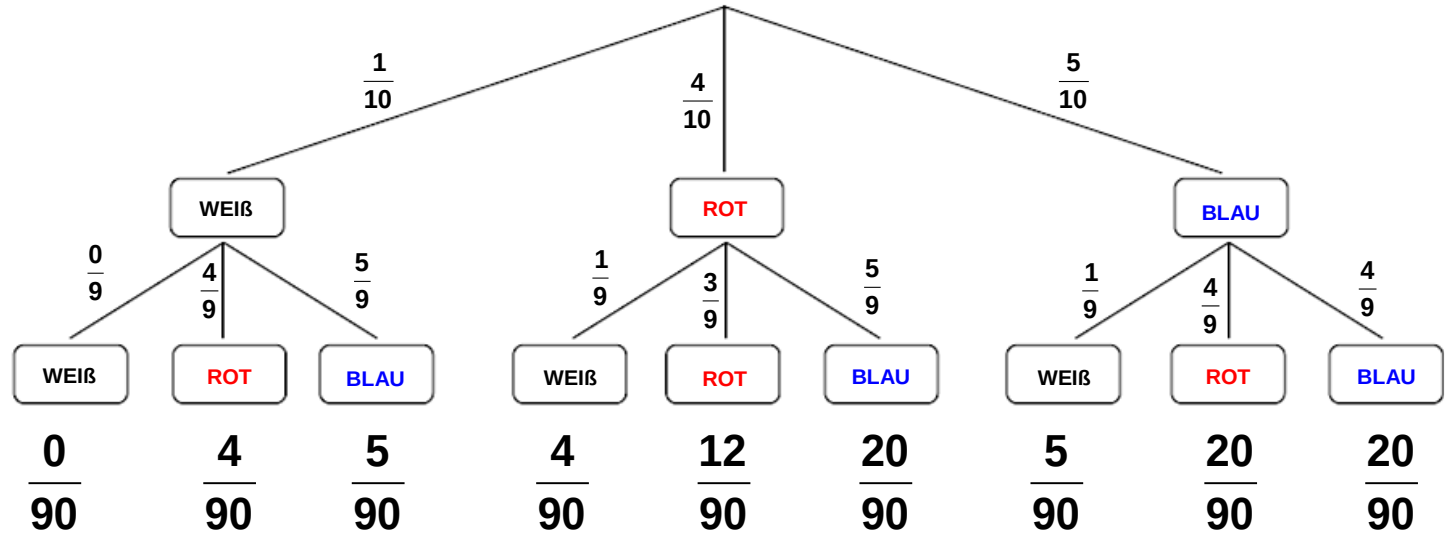
$$P(>12) = 1 - P(12) = \frac{36}{36} - \frac{9}{36} = \frac{27}{36} = 75\%$$

$$P(<30) = 1 - P(30) - P(30) - P(40)$$

$$P(<30) = 1 - \frac{2}{36} - \frac{2}{36} - \frac{1}{36} = \frac{31}{36} = 86{,}11\%$$

Haupttermin 2009

Haupttermin 2009 – P8 (Ziehen ohne Zurücklegen → Kugeln)



$$P(2xversch) = 1 - \frac{12}{90} - \frac{20}{90} = \frac{29}{45} = 64{,}44\%$$

$$P(höchstens1xrot) = 1 - \frac{12}{90} = \frac{13}{15} = 86{,}67\%$$

[4]

Augensumme kleiner als 5

	1	2	3	4	5	6
1	x	x	x			
2	x	x				
3	x					
4						
5						
6						

$$P(kleiner\ 5) = \frac{6}{36} = 16{,}67\,\%$$

Kein Pasch

	1	2	3	4	5	6
1	x					
2		x				
3			x			
4				x		
5					x	
6						x

$$P(keinPasch) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = 83{,}33\%$$

Augensumme = 10

Augensumme kleiner 4

	1	2	3	4	5	6
1	x	x				
2	x					
3						
4						x
5					x	
6				x		

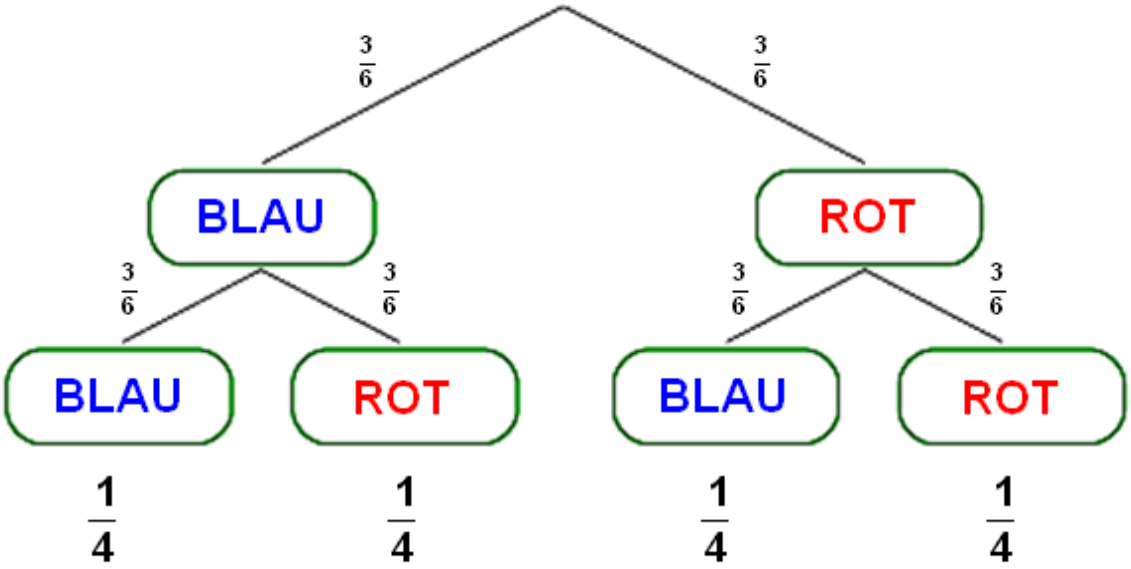
$$P(=10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(kleiner\ 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Haupttermin 2010

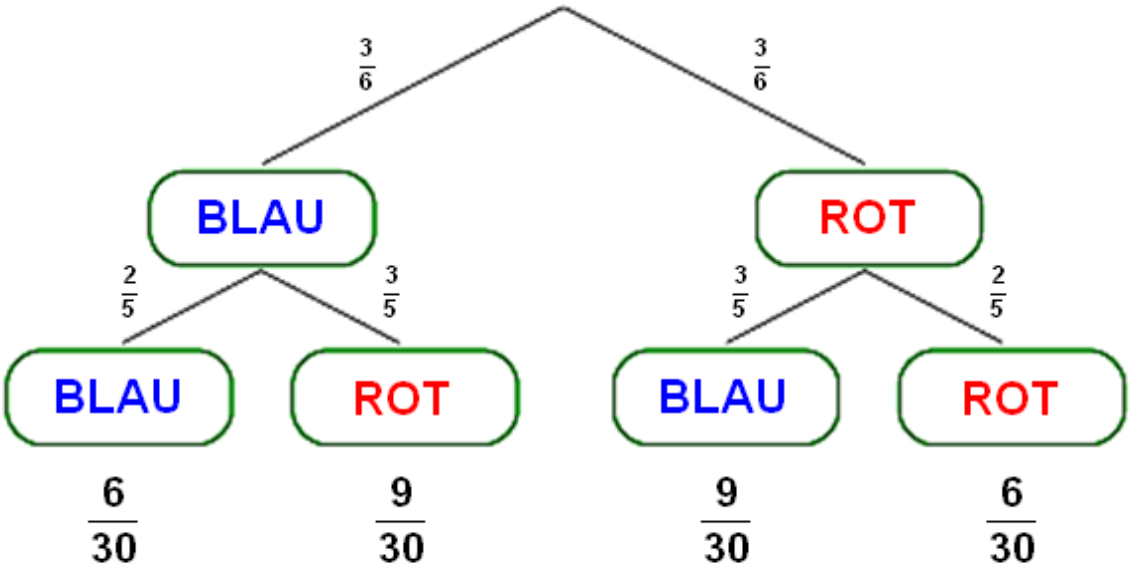
Haupttermin 2010 – P6 (Ziehen mit & ohne Zurücklegen → Kugeln)

Ziehen mit Zurücklegen



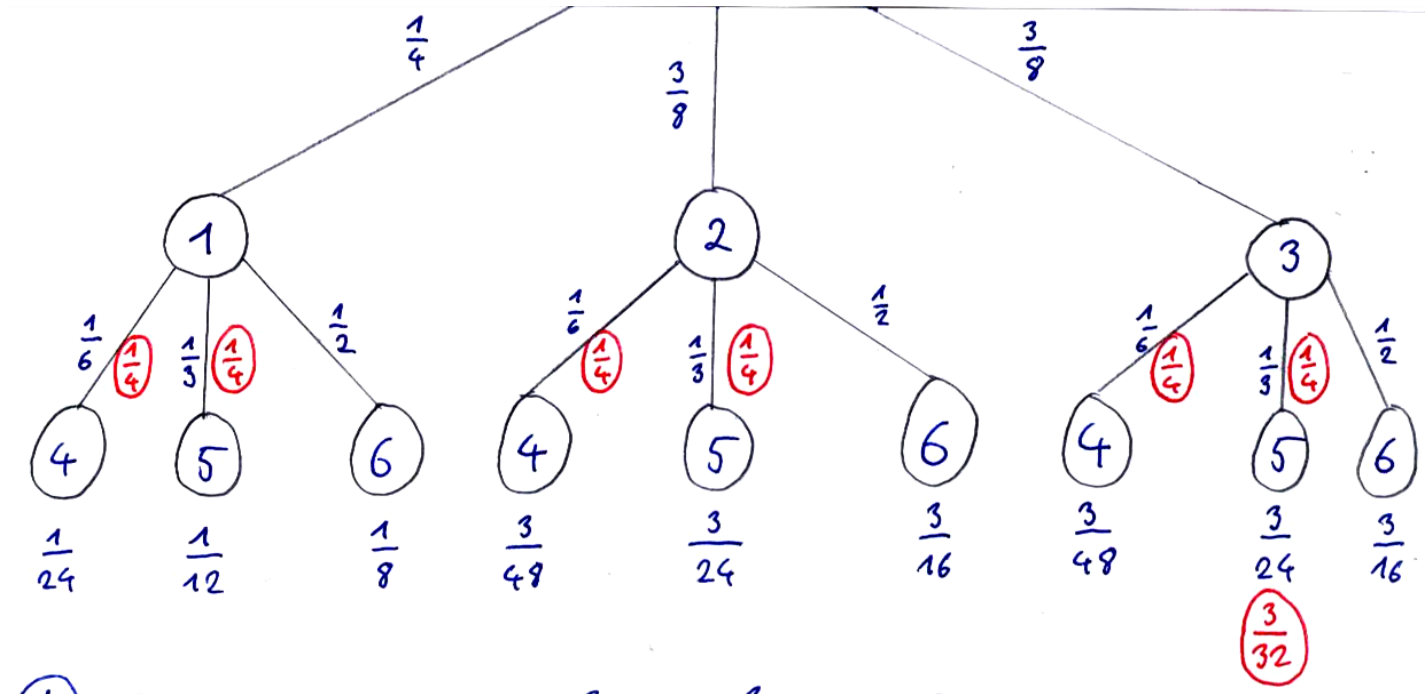
$$P(2\,xversch\;) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = 50\,\%$$

Ziehen ohne Zurücklegen



$$P(2\,xversch\;) = \frac{9}{30} + \frac{9}{30} = \frac{18}{30} = 60\,\%$$

Haupttermin 2010 – W4a (Ziehen mit Zurücklegen → Glücksrad / 2 Situationen)



(A) $P(\text{Summe 8 oder 9}) = \frac{3}{16} + \frac{3}{24} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2} = 50\,\%$

(B) $P(\text{alle anderen Summen}) = 1 - P(\text{Summe 8 oder 9}) = 50\,\%$

Antwort: Es spielt keine Rolle für welche Gewinnsituation man sich entscheidet

Veränderte Bedingungen

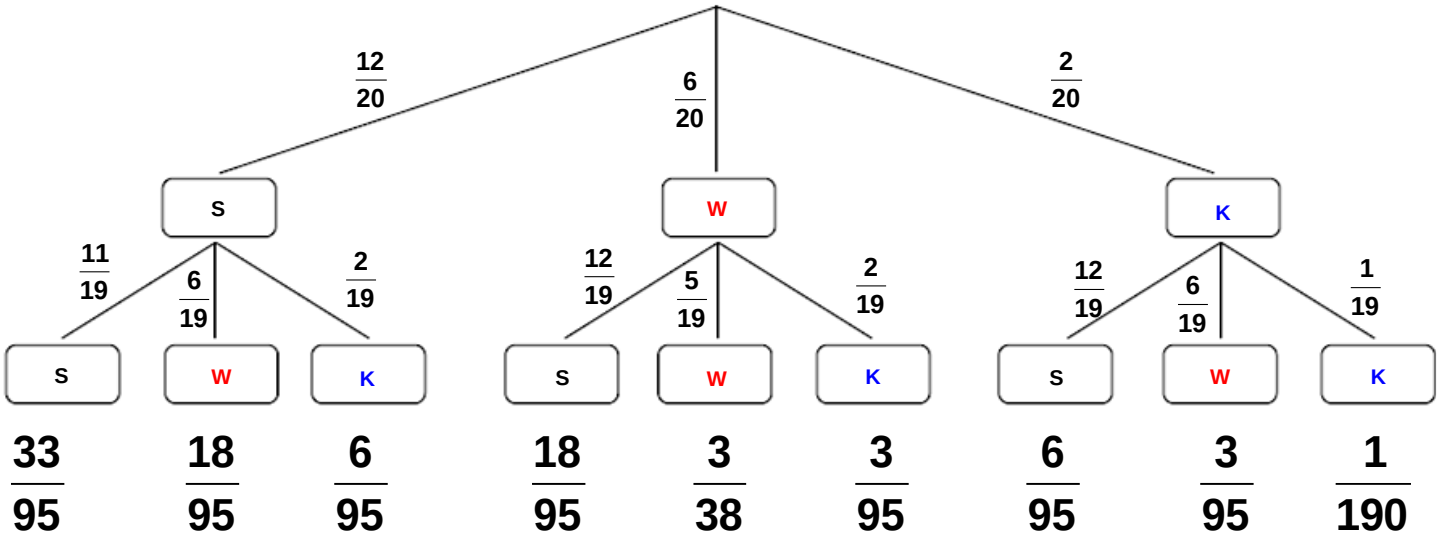
(A) $P(\text{Summe 8 oder 9}) = \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} = \frac{15}{32} = 46{,}88\,\%$

(B) $P(\text{alle anderen Summen}) = 1 - P(\text{Summe 8 oder 9}) = 53{,}12\,\%$

Antwort: Die Gewinnsituation (B) ist günstiger.

Haupttermin 2011

Haupttermin 2011 – P8 (Ziehen ohne Zurücklegen → Glückskekse)



$$P(Sprichwort) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\%$$

$$P(2\,x\,verschied\,en) = 1 - \frac{33}{95} - \frac{3}{38} - \frac{1}{190} = \frac{54}{95} = 56{,}84\%$$

Ereignis	Gewinn	Einsatz	Bilanz	Wahrscheinlichkeit
Hauptgewinn	20	2	18	$\frac{10}{200}$
Kleingewinn	4	2	2	$\frac{40}{200}$
Niete	0	2	-2	$\frac{150}{200}$

$$W = \frac{10}{200} \cdot 18 + \frac{40}{200} \cdot 2 + \frac{150}{200} \cdot (-2) = -0{,}20\ €$$

Der **Spieler** kann auf lange Sicht mit **20 ct Verlust pro Spielrunde** rechnen.

Die **Abschlussklassen** können auf lange Sicht mit **20 ct Gewinn pro Spielrunde** rechnen.

Einnahmen durch Losverkauf

250 · 2 = 500 €

Ausgaben durch Gewinne

40 · 4 + 10 · 20 = 360 €

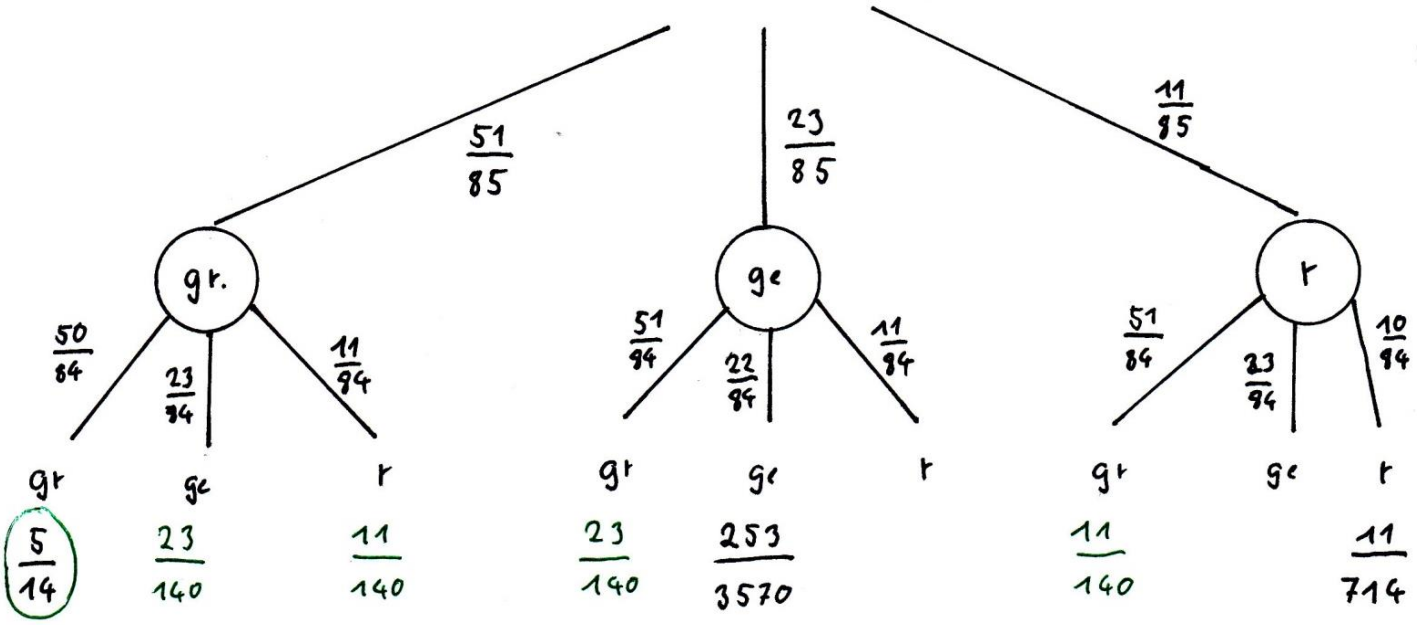
Möglicher Spendenbetrag

500 – 360 = 140 €

Die Abschlussklassen können 140 € für das soziale Projekt spenden.

Haupttermin 2012

Haupttermin 2012 – P4 (Ziehen ohne Zurücklegen → Parkhaus)



$$P(\text{2x gleiche Farbe}) = \frac{5}{14} + \frac{253}{3570} + \frac{11}{714} = 44,34\,\%$$

$$P(\text{mind. 1x grün}) = \frac{5}{14} + \frac{23}{140} + \frac{11}{140} + \frac{23}{140} + \frac{11}{140} = 84,29\,\%$$

Haupttermin 2012 – W4a (Einstufiger Erwartungswert → Glücksrad)

Ereignis	Gewinn	Einsatz	Bilanz	Wahrscheinlichkeit
Rot	4	2	2	$25\% = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$
Gelb	1,50	2	-0,50	$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$
Blau	0,60	2	-1,40	$\frac{5}{12}$

$$\mathbf{W = \frac{3}{12} \cdot 2 + \frac{4}{12} \cdot (-0{,}50) + \frac{5}{12} \cdot (-1{,}40) = -0{,}25\ €}$$

Der **Spieler** kann auf lange Sicht mit **25 ct Verlust pro Spielrunde** rechnen.

Die **Klasse** kann auf lange Sicht mit **25 ct Gewinn pro Spielrunde** rechnen.

$\frac{3}{12} \cdot 2$	+	$\frac{4}{12} \cdot (-0{,}50)$	+	$\frac{5}{12} \cdot x$	=	– 0,50 €	/ · 12
3 · 2	+	4 · (- 0,50)	+	5 · x	=	– 0,50 · 12	
6	–	2	+	5 · x	=	– 6	/ – 4
				5 · x	=	– 10	/ : 5
				x	=	– 2	

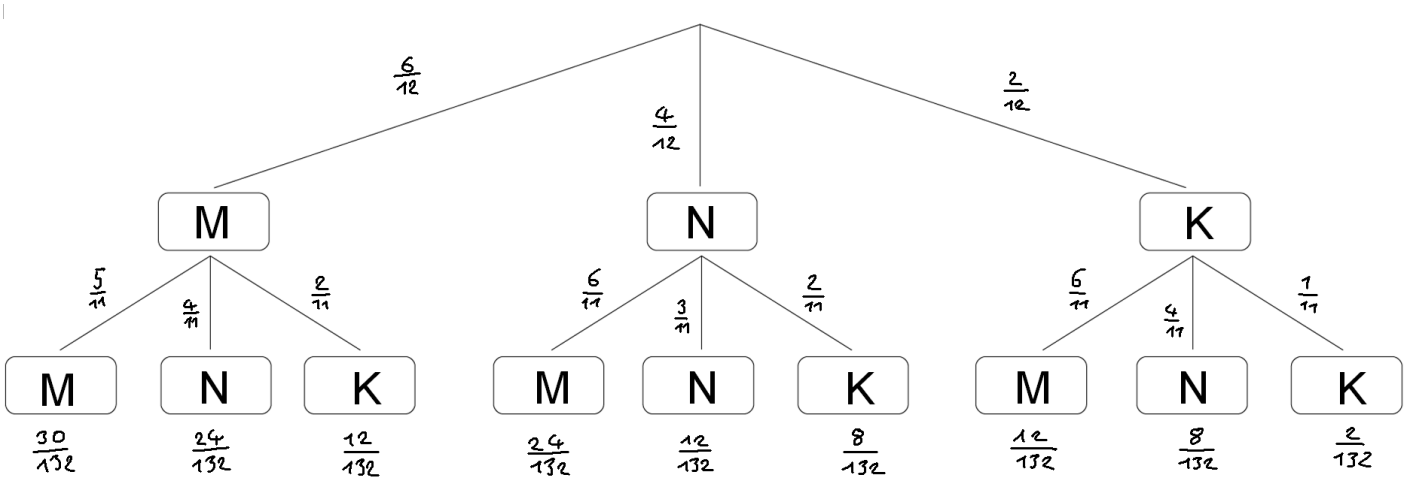
Der **Gewinn** für das **blaue Feld** müsste **0 €** betragen, damit die Klasse den zu erwartenden Gewinn pro Spielrunde verdoppelt.

Die **Gewinne** für das **rote** und das **gelbe Feld** bleiben bei diesem Gewinnplan **gleich**.

Haupttermin 2013

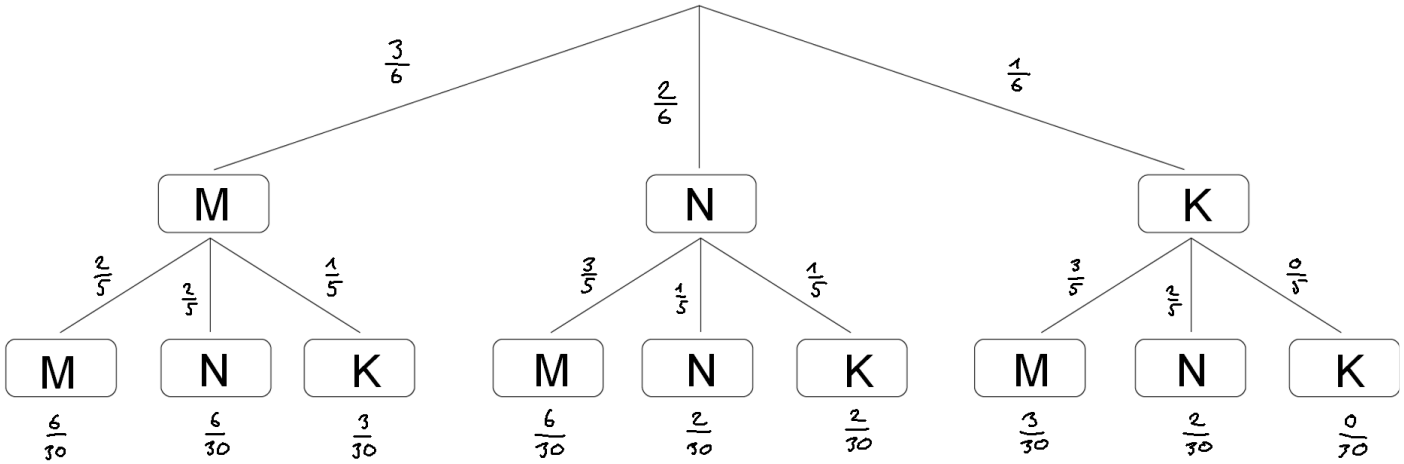
Haupttermin 2013 – P7 (Ziehen ohne Zurücklegen → Schokowürfel)

Anastasias Versuch:



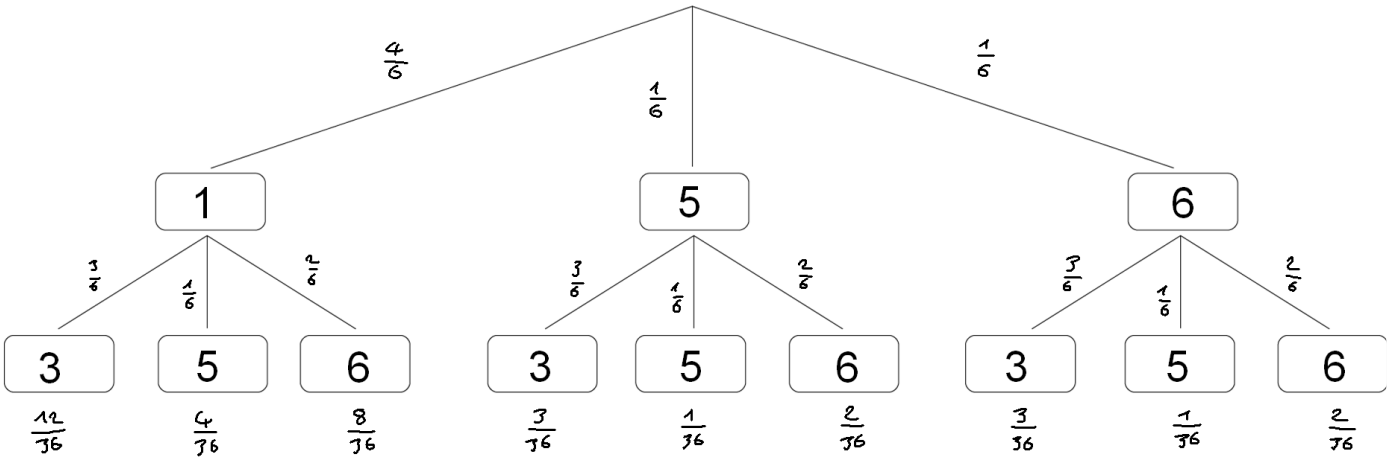
$$\text{P (2x verschieden)} = 1 - \frac{30}{132} - \frac{12}{132} - \frac{2}{132} = \frac{88}{132} = 66{,}67\ \%$$

Leons Versuch:



$$\text{P (2x verschieden)} = 1 - \frac{6}{30} - \frac{2}{30} - \frac{0}{30} = \frac{22}{30} = 73{,}33\ \%$$

Leon hat nicht Recht. Die Wahrscheinlichkeit erhöht sich.



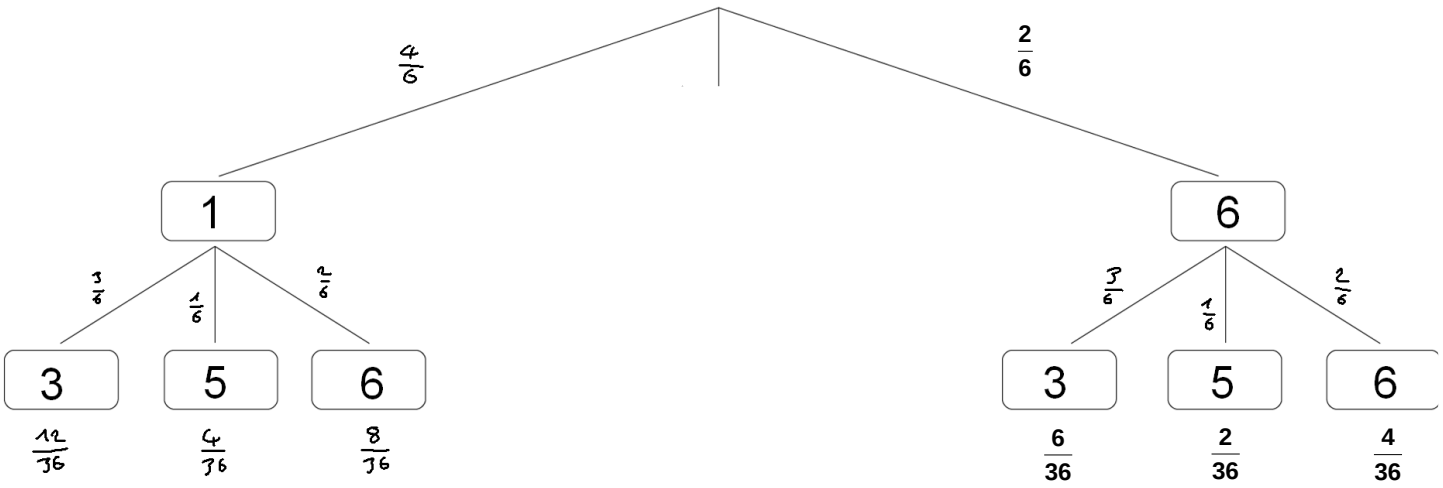
$$\textbf{P (mind.1x 6)} = \frac{8}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} = 44{,}44\%$$

Ereignis	Gewinn	Einsatz	Bilanz	Wahrscheinlichkeit
Pasch	9	1	8	$\frac{3}{36}$
kein Pasch	0	1	-1	$\frac{33}{36}$

$$W = \frac{3}{36} \cdot 8 + \frac{33}{36} \cdot (-1) = -0{,}25\ €$$

Der **Spieler** kann auf lange Sicht mit **0,25 € Verlust pro Spielrunde** rechnen.

Der **Veranstalter** kann auf lange Sicht mit **0,25 € Gewinn pro Spielrunde** rechnen.



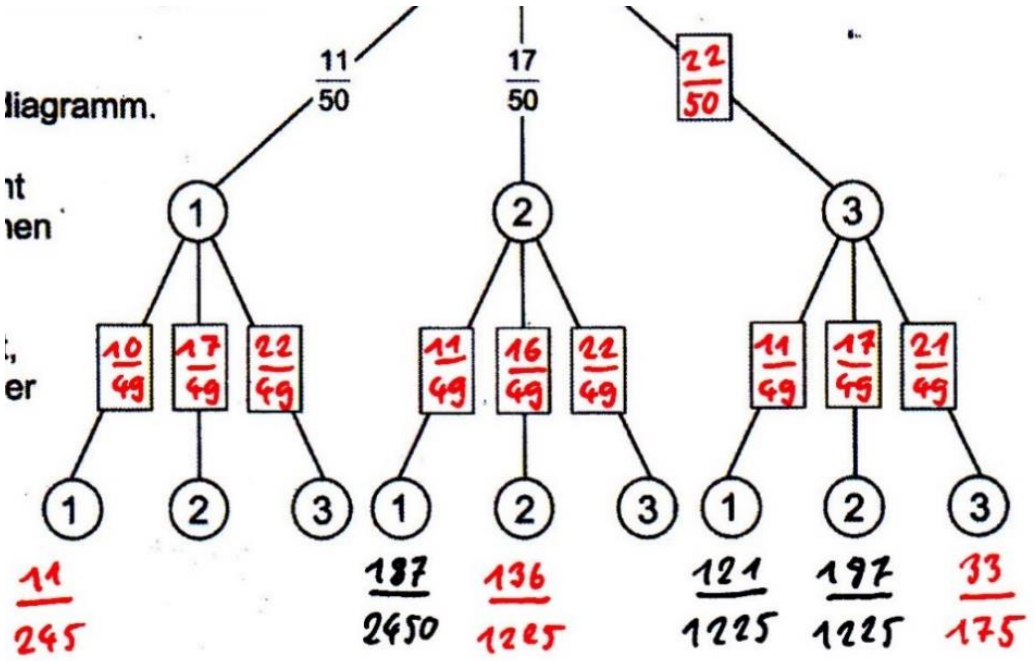
Ereignis	Gewinn	Einsatz	Bilanz	Wahrscheinlichkeit
Pasch	9	1	8	$\frac{4}{36}$
kein Pasch	0	1	-1	$\frac{32}{36}$

$$W = \frac{4}{36} \cdot 8 + \frac{32}{36} \cdot (-1) = 0\ €$$

Das Ersetzen der „Fünf“ durch eine „Sechs“ wäre für den **Veranstalter** nicht vorteilhaft, da es sich nun um ein faires Spiel handelt und er somit keinen Gewinn pro Spielrunde macht.

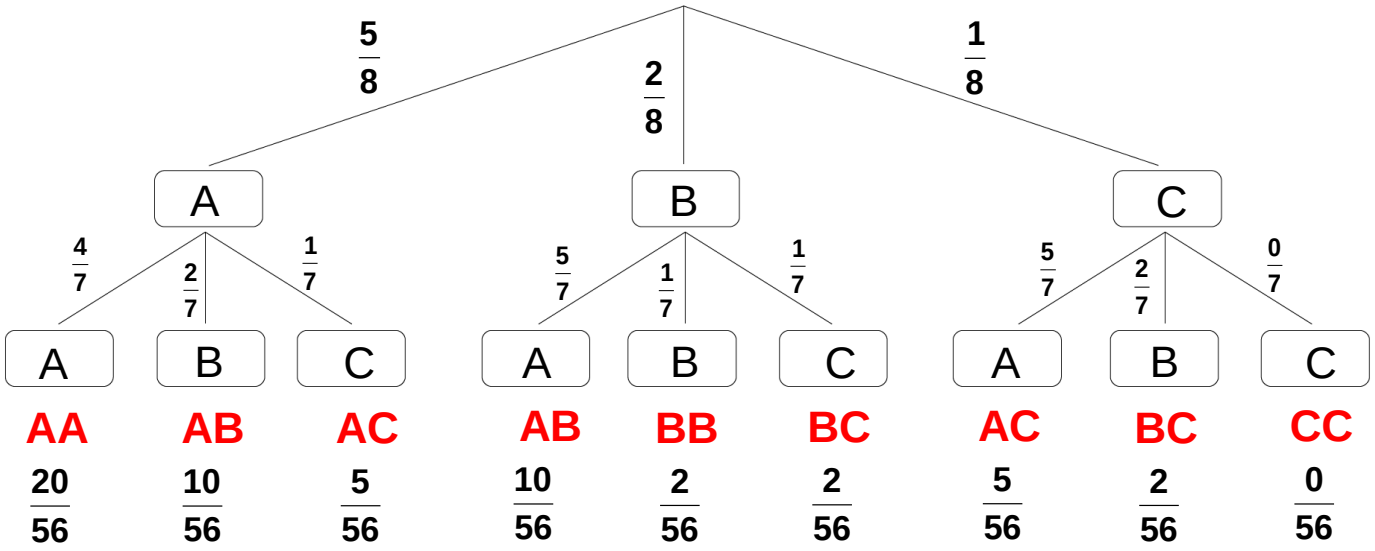
Haupttermin 2014

Haupttermin 2014 – P8 (Ziehen ohne Zurücklegen → Kugeln)



$$P(2\times \text{gleich}) = \frac{11}{245} + \frac{136}{1225} + \frac{33}{175} = \frac{422}{1225} = 34{,}45\,\%$$

$$P(1.\text{Zahl} > 2.\text{Zahl}) = \frac{187}{2450} + \frac{121}{1225} + \frac{197}{1225} = \frac{803}{2450} = 32{,}78\,\%$$



$$P(\text{2x verschieden}) = 1 - \frac{20}{56} - \frac{2}{56} - \frac{0}{56} = \frac{34}{56} = \frac{17}{28} = 60{,}71\,\%$$

Gewinnplan 1

Ereignis	Gewinn	Einsatz	Bilanz	Wahrscheinlichkeit
„2 x gleich“	3	2,5	0,5	$\frac{22}{56} = \frac{11}{28}$
„Buchstabe C“	5	2,5	2,5	$\frac{14}{56} = \frac{1}{4}$
„Rest“	0	2,5	- 2,5	$\frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

$$W = 0{,}5 \cdot \frac{11}{28} + 2{,}5 \cdot \frac{1}{4} + (-2{,}5) \cdot \frac{5}{14} = -\frac{1}{14}\,€ = -0{,}07\,€$$

Auf lange Sicht macht der **Betreiber** pro Runde einen **Gewinn** von **ca. 0,07 €.**

Gewinnplan 2

Ereignis	Gewinn	Einsatz	Bilanz	Wahrscheinlichkeit
„2 x gleich“	5	2,5	2,5	$\frac{22}{56} = \frac{11}{28}$
„Buchstabe C“	3	2,5	0,5	$\frac{14}{56} = \frac{1}{4}$
„Rest“	0	2,5	- 2,5	$\frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

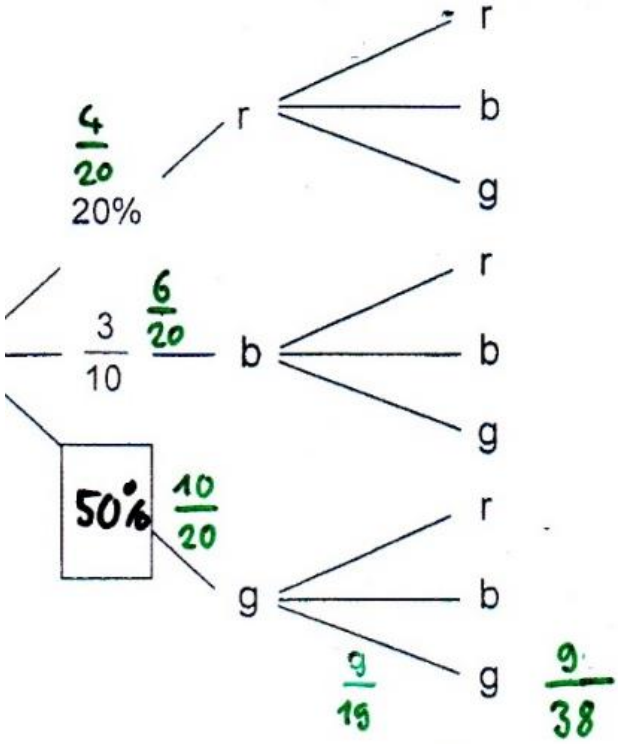
$$W = 2{,}5 \cdot \frac{11}{28} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{4} + (-2{,}5) \cdot \frac{5}{14} = \frac{3}{14}\,€ = 0{,}21\,€$$

Auf lange Sicht macht der **Betreiber** pro Runde einen **Verlust** von **ca. 0,21 €**

Der Betreiber sollte sich für den **Gewinnplan 1** entscheiden, da bei diesem einen Gewinn von ca. 7 ct pro Runde erwarten kann.

Haupttermin 2015

Haupttermin 2015 – P4 (Ziehen ohne Zurücklegen → Kugeln)



① Ber. P (höchstens 1x grün)

$$P = 1 - \frac{9}{38} = \frac{29}{38}$$

$= 76{,}31\,\%$

(bei 20 Kugeln)

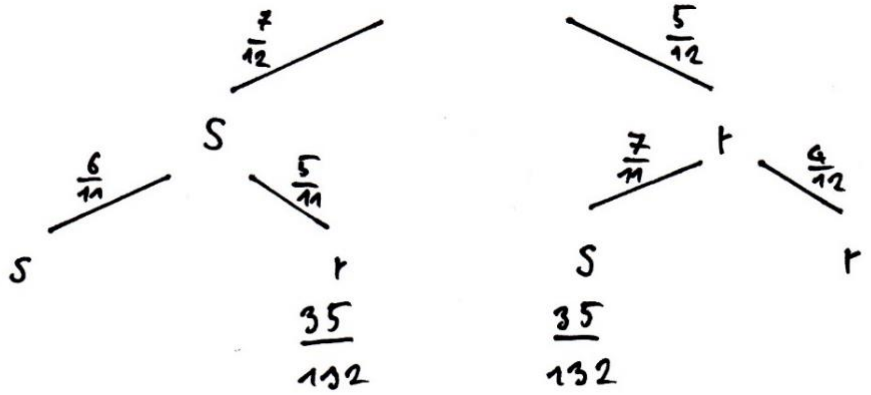
② Überprüfung Behauptung Uli

$$P_{neu} = 1 - \frac{20 \cdot 19}{40 \cdot 39} = \frac{59}{78}$$

$= 75{,}64\,\%$

(bei 40 Kugeln)

Uli hat nicht Recht. Bei der Verdopplung der Kugeln verringert sich die Wahrscheinlichkeit.



$$P(\text{rot} \mid \text{schwarz}) = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132} = \frac{35}{66} = 53{,}03\,\%$$

Ereignis	Gewinn	Einsatz	Bilanz		Wahrs.
2 × Karo	10	1	9	$\frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} =$	$\frac{2}{132}$
2 × Herz	5	1	4	$\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} =$	$\frac{6}{132}$
sonstige	0	1	−1	$=$	$\frac{124}{132}$

$$W_1 = 9 \cdot \frac{2}{132} + 4 \cdot \frac{6}{132} + (-1) \cdot \frac{124}{132} = -\frac{41}{66} = -0{,}62\,€$$

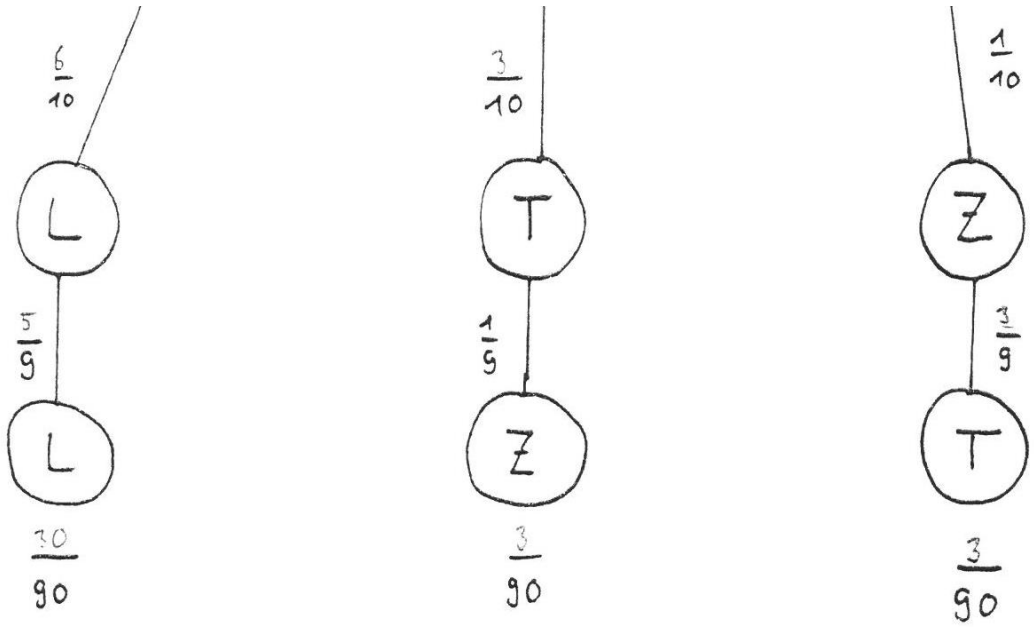
Der Spieler macht auf lange Sicht pro Spielrunde 0,62 € Verlust.

$$W_2 = 19 \cdot \frac{2}{132} + 4 \cdot \frac{6}{132} + (-1) \cdot \frac{124}{132} = -\frac{31}{66} = -0{,}47\,€$$

Der Betreiber hat nicht Recht. Er macht immernoch Gewinn.

Haupttermin 2016

Haupttermin 2016 – P7 (Ziehen ohne Zurücklegen → Buchstabenkarten)



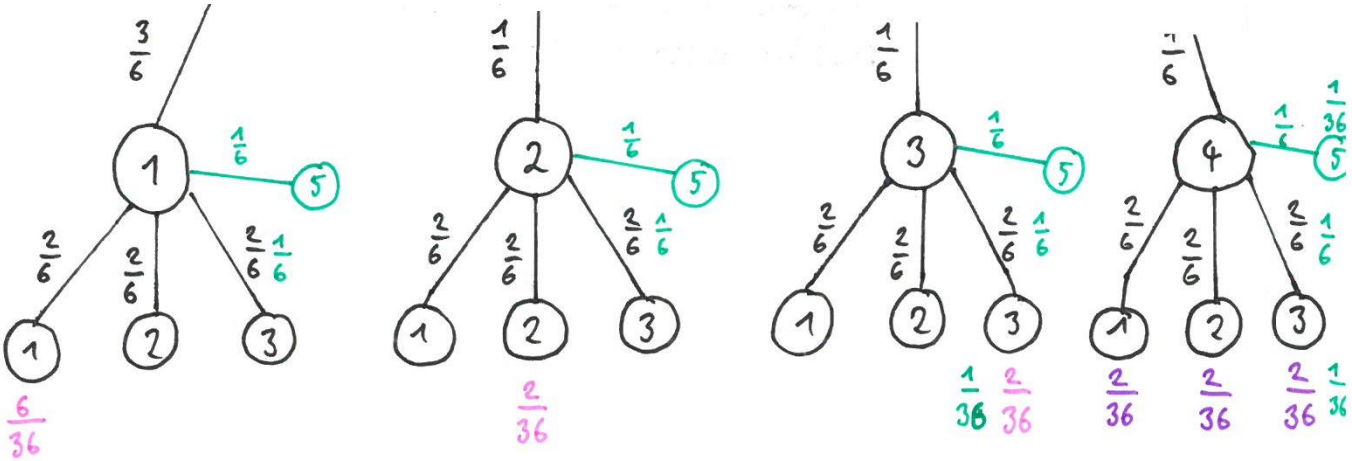
① Ber. SCHALL

$P(\text{SCHALL}) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} = 33{,}33\,\%$

② Ber. SCHATZ

$P(\text{SCHATZ}) = \frac{3}{90} + \frac{3}{90} = \frac{6}{90} = 6{,}67\,\%$

Haupttermin 2016 – W4a (Zweistufiger Erwartungswert → Glücksräder)



$P(2 \times \text{gleich}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 27{,}78\,\%$

Ergebnis	Gewinn	Einsatz	Bilanz	Wahrsch.	
2 × gleich	3	2	1	$\frac{10}{36}$	$\frac{9}{36}$
größer 40	5	2	3	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$
Rest	0	2	−2	$\frac{20}{36}$	$\frac{21}{36}$

$W = 1 \cdot \frac{10}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + (-2) \cdot \frac{20}{36}$

$W = -0{,}33\ €$

Spieler macht auf Länge Sicht pro Spielrunde 33ct Verlust.

$W_{neu} = 1 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + (-2) \cdot \frac{21}{36}$

$W_{neu} = -0{,}42\ €$

Ja, der Erwartungswert ändert sich zugunsten des Glücksradbetreibers. Der Tausch wäre somit vorteilhaft.

Haupttermin 2017

Haupttermin 2017 – P4 (Ziehen mit Zurücklegen → Würfel / Summe)

	1	2	3	4	5	6
1					X	
2				X		X
3			X		X	X
4		X		X	X	
5	X		X	X		
6		X	X			

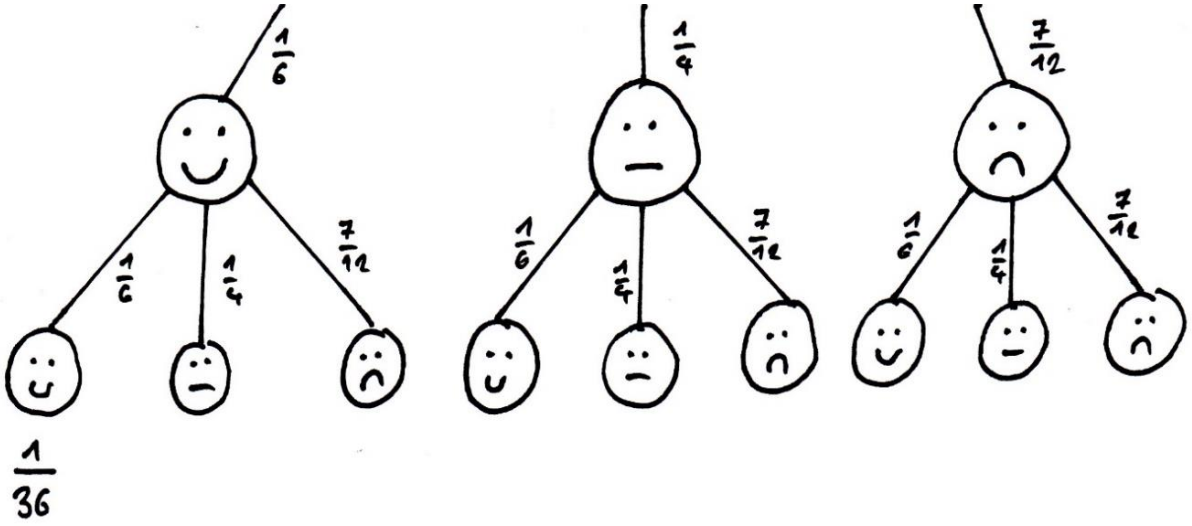
$P(6) = \frac{5}{36} = 13{,}89\,\%$

$P(9) = \frac{4}{36} = 11{,}11\,\%$

Die Aussage stimmt.

$P(>8) = \frac{10}{36} = 27{,}78\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Nele gewinnt liegt bei 27,78 %



$P(\text{höchstens 1x} \ddot{\smile}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} = 97{,}22\%$

	Gewinn	Einsatz	Bilanz	Wahrsch.
2x ü	4	0,5	3,5	$\frac{1}{36}$
2x :(	2	0,5	1,5	$\frac{1}{16}$
Rest	0	0,5	−0,5	$\frac{131}{144}$

Der Gewinn für 2x ü muss 13,5 € betragen.

$W = \frac{1}{36} \cdot 3{,}5 + \frac{1}{16} \cdot 1{,}5 + \frac{131}{144} \cdot (-0{,}5)$

$W = -\frac{19}{72} = -0{,}26\ €$

$\frac{1}{36} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot 1{,}5 + \frac{131}{144} \cdot (-0{,}5) = 0$

$\frac{1}{36} \cdot x - \frac{13}{36} = 0 \quad | \cdot 36$

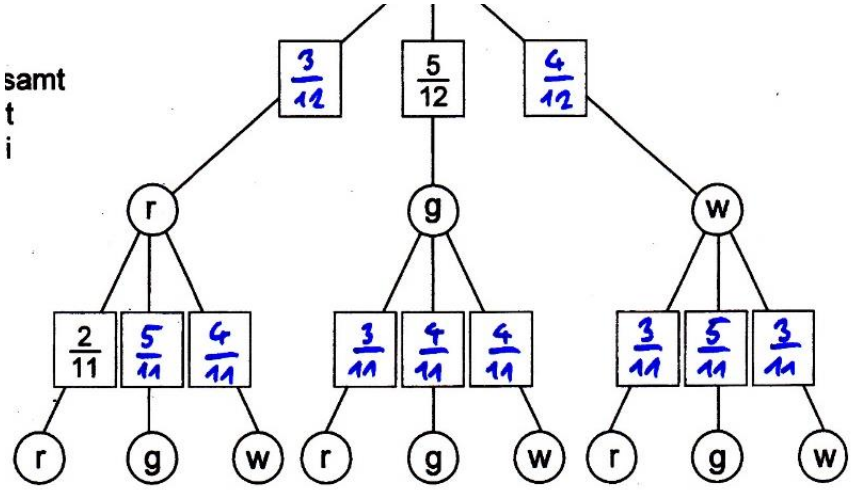
$x - 13 = 0$

$x = 13$

(Bilanz 2x ü)

Haupttermin 2018

Haupttermin 2018 – P7



① Ber. P(genau 1x rot)

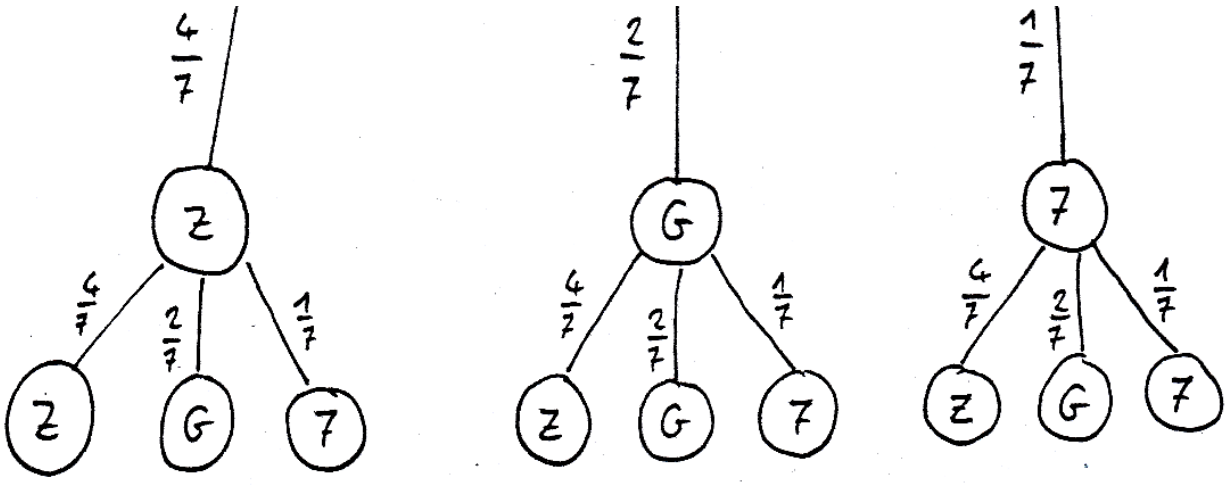
$$P = \frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11} + \frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11} + \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{11} + \frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}$$

$$P = \frac{9}{22} = 40{,}91\,\%$$

② Ber. P(höchstens 1x weiß)

$$P = 1 - \frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}$$

$$P = 90{,}91\,\% \quad \left(\frac{10}{11}\right)$$



$$P(2 \times G) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} = 8{,}16\,\%$$

	Bilanz	Wahrs.
2 x G	+ 2,8	$\frac{4}{49}$
2 x 7	9 x	$\frac{1}{49}$
Rest	− 1 − 1,2	$\frac{44}{49}$

$$W = 3 \cdot \frac{4}{49} + 9 \cdot \frac{1}{49} + (-1) \cdot \frac{44}{49}$$

$W = -0{,}47\,€$

Der Spieler macht auf lange Sicht pro Spielrunde 47 ct Verlust

$$-0{,}47 = 2{,}8 \cdot \frac{4}{49} + x \cdot \frac{1}{49} - 1{,}2 \cdot \frac{44}{49}$$

$$-0{,}47 = x \cdot \frac{1}{49} - \frac{209}{245}$$

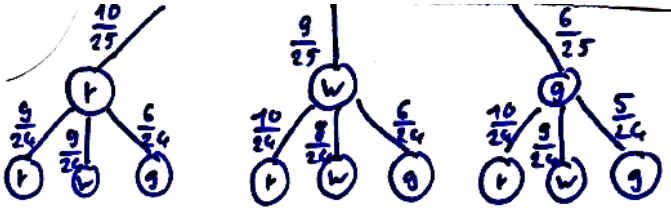
$x = 18{,}57$

A: Merk hat Recht.

⇒ Gewinn für 2 x 7 muss auf 19,77 € erhöht werden.

Haupttermin 2019

Haupttermin 2019 – P7



$P(\text{rot, dann weiß}) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3}{20} = 15\,\%$

$P(\text{Kein grünen}) = \frac{10 \cdot 9}{25 \cdot 24} \cdot 3 + \frac{9 \cdot 8}{25 \cdot 24} = \frac{57}{100} = 57\,\%$

$P(2 \times \text{Brause}) = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} = \frac{7}{75} = 9{,}33\,\%$

W4a

	1	2	3	4	5	6
1	×	×	×			
2	×	×				
3	×					
4						
5						
6						

$P(A=4) = \frac{3}{36}$

$P(A<4) = \frac{3}{36}$

$P(A>4) = \frac{30}{36}$

	Gewinn	Einsatz	Bilanz	W
$=4$	4	1	3	$\frac{3}{36}$
<4	2	1	1	$\frac{3}{36}$
>4	0	1	−1	$\frac{30}{36}$

$W = \frac{3}{36} \cdot 3 + \frac{3}{36} \cdot 1 - \frac{30}{36} \cdot 1$

$W = -0{,}50\,€$

Veränderte Situationen

	1	1	1	1	2	3
1	×	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	×	
3	×	×	×	×		
4						
5						
6						

$P(A=4) = \frac{6}{36}$

$P(A<4) = \frac{9}{36}$

$P(A>4) = \frac{21}{36}$

$W_{neu} = 0{,}17\,€$

	1	2	3	3	3	3
1	×	×	×	×	×	×
2	×	×				
3	×					
4						
5						
6						

$P(A=4) = \frac{6}{36}$

$P(A<4) = \frac{3}{36}$

$P(A>4) = \frac{27}{36}$

$W_{neu} = -0{,}17\,€$

Der Betrüger sollte sich für die drei Dreien entscheiden, macht auf lange Sicht jedoch pro Spielrunde weniger Gewinn.